数理解析研究所講究録
294 巻 1977 年 100-123

代数体における種々の素数定理

学習院大 理　　三井孝美

<u>§1.</u>　Kをn次の代数体とし，Kの実共役を$K^{(q)}$ ($q=1, \cdots, r_1$)，複素共役を$K^{(p)}=\overline{K^{(p+r_2)}}$ ($p=r_1+1, \cdots, r_1+r_2$) とする ($n=r_1+2r_2$)．Kの数μの$K^{(i)}$の中の共役を，$\mu^{(i)}$と記す．

Kの整数ωが生成する単項イデアル(ω)が素イデアルのとき，ωをKの素数という．

Kの数はn次元空間の点とみなされるから，Kの素数がどのように存在するかという問題は，n次元空間の素数分布の問題と考えられる．これに対して，ノルム$N(\omega)$を考えるときは，1次元内の分布の問題となり，素イデアル定理などがその例である．

筆者は先に，素イデアル定理について，次の結果を得た ([4])；

$$(1)\quad \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} 1 = li(x) + O\left(x\exp\left(-c(\log x)^{3/5}/(\log\log x)^{1/5}\right)\right),$$

ここで $li(x)$ は対数積分である。

一方，代数体における素数の分布の問題に関して，筆者は次のような素数定理を得ていた（[3]）；

$\Upsilon_1, \cdots, \Upsilon_n$ は正数で，$\Upsilon_p = \Upsilon_{p+r_2}$ （$p = r_1+1, \cdots, r_1+r_2$）なるものとし，$\log \Upsilon_i / \log \Upsilon_j$ （$1 \leqq i, j \leqq n$）は有界とする。$\vartheta_1, \cdots, \vartheta_{r_2}$ を $[0, 1]$ 中の数として，次の條件をみたす素数 ω の個数を $\pi(\Upsilon_q ; \vartheta_p) = \pi(\Upsilon_1, \cdots, \Upsilon_n ; \vartheta_1, \cdots, \vartheta_{r_2})$ とする；

$$\begin{cases} 0 < \omega^{(q)} \leqq \Upsilon_q & (q = 1, \cdots, r_1), \\ |\omega^{(p)}| \leqq \Upsilon_p & (p = r_1+1, \cdots, r_1+r_2), \\ 0 < \arg \omega^{(p+r_2)} \leqq 2\pi\vartheta_p & (p = 1, \cdots, r_2). \end{cases}$$

このとき

$$(2) \quad \pi(\Upsilon_q ; \vartheta_p) = \frac{w_0}{h_0 R_0} \vartheta_1 \cdots \vartheta_{r_2} \int_2^{\Upsilon_1^{e_1}} dt_1 \cdots \int_2^{\Upsilon_{r+1}^{e_{r+1}}} \frac{dt_{r+1}}{\log(t_1 \cdots t_{r+1})}$$

$$+ O(\bar{\Upsilon} \exp(-c(\log \bar{\Upsilon})^{1/2})).$$

ここで $\bar{\Upsilon} = \Upsilon_1 \cdots \Upsilon_n$，$r = r_1 + r_2 - 1$，$e_i = 1$ （$1 \leqq i \leqq r_1$），$= 2$ （$r_1+1 \leqq i \leqq r+1$）であり，w_0, h_0, R_0 はそれぞれ，K内の總正な1の根の個数，狭義のイデアル類数，總正な基本単数による単数基準である。

ところで，(2) の残余項は，(1) の形に改良できる，即ち，

(2)の残余項は

$$O\left(\overline{Y}\exp\left(-c(\log\overline{Y})^{3/5}/(\log\log\overline{Y})^{1/5}\right)\right)$$

となるのである．これが我々の主要定理であり，それを示すためには，[4]と同様，三角和の方法を応用し，一方で，素数の分布に関するいくつかの予備的な定理を求めなければならない．これが，「種々の素数定理」と表題にいう所以である．

はじめに，量指標について，必要な事柄を述べておこう．

Kの総正な単数の群を E_0 と記し，w_0 を E_0 の中の1の根の数として，$\zeta = e^{2\pi i/w_0}$ とおく．イデアル類は狭義で考えることとし，首類を C_0 で表わす．Kの総正な基本単数を $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ とし，r 次の行列

$$\left(\log|\varepsilon_k^{(i)}|\right)_{1\leqq i,k\leqq r}$$

の逆行列を $(\alpha_{ik})_{1\leqq i,k\leqq r}$ とする．

Hecke が[1]で導入したように，イデアル数を $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \cdots$ と記すこととし，non-zero なイデアル数 $\hat{\mu}$ に対して，次のような函数を定義する；

$$W_q(\hat{\mu}) = \sum_{p=1}^{r}\alpha_p^{(q)}\left(\log|\hat{\mu}^{(p)}| - \frac{1}{n}\log|N(\hat{\mu})|\right)$$

$$(q = 1, \cdots, r),$$

$$\omega_p(\hat{\mu}) = \frac{1}{2\pi}\arg\hat{\mu}^{(p+r_1)} - \frac{1}{2\pi}\sum_{q=1}^{r}W_q(\hat{\mu})\arg\varepsilon_q^{(p+r_1)}$$

$$(p = 1, \cdots, r_2).$$

さらに, $m_1, \cdots, m_r, l_1, \cdots, l_{r_2}$ を有理整数とし, $\{m_q\}$ は任意, $\{l_p\}$ は

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{r_2} l_p \arg \zeta^{(p+r_1)} = \text{有理整数}$$

となるものとする.

以上のような $\{W_q(\hat{\mu}), \Theta_p(\hat{\mu}), m_q, l_p\}$ により定義される $\hat{\mu}$ の函数

$$(4) \qquad \lambda(\hat{\mu}) = \exp\left\{2\pi i\left(\sum_{q=1}^{r} W_q(\hat{\mu})\, m_q + \sum_{p=1}^{r_2} \Theta_p(\hat{\mu})\, l_p\right)\right\}$$

を, <u>E_0 に関する量指標</u>というのである.

ここで, $W_q(\hat{\mu})$ を $\log|\hat{\mu}^{(p)}|$ $(p=1, \cdots, r+1)$ の1次結合の形に表わして

$$W_q(\mu) = \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log|\hat{\mu}^{(p)}| \qquad (q=1, \cdots, r)$$

とすれば, 量指標は

$$(5) \qquad \lambda(\hat{\mu}) \doteq \exp\left\{i\left(\sum_{q=1}^{r+1} v_q \log|\hat{\mu}^{(q)}| + \sum_{p=1}^{r_2} l_p \arg \hat{\mu}^{(p+r_1)}\right)\right\}$$

とも表わされる. ここに

$$v_q = \sum_{k=1}^{r} e_q^{(k)}\left(2\pi m_k - \sum_{p=1}^{r_2} l_p \arg \zeta_k^{(p+r_1)}\right) \qquad (q=1, \cdots, r+1)$$

である. (4) は $\{m_q, l_p\}$ を, (5) は μ を明示した形であ

り，それぞれ利用される．

もう少し一般に，$\hat{\mu}$ の符号条件を考慮した量指標も、次のように考えられる；

Kの non-zero なイデアル数 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ に対して，$\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ を $\hat{\alpha}/\hat{\beta} \succ 0$（$\succ 0$ は総正であることを表わす記号）により定義すると，この関係により，イデアル数は類別され，その類は，位数が $2^{r_1}h$（h はKの絶対類数）のアーベル群を作る．この群の指標を χ で表わして，χ と λ の積 $\chi\lambda$ を，やはり，量指標という．

E_0 上で $\chi\lambda = 1$ となることは容易にわかるが，特に，Kのすべての単数 ε に対して $\chi\lambda(\varepsilon) = 1$ となるときは，イデアル数 $\hat{\alpha}$ に対する値 $\chi\lambda(\hat{\alpha})$ は，$\hat{\alpha}$ に対応するイデアル $\mathfrak{a} = (\hat{\alpha})$ だけによってきまるから，$\chi\lambda(\mathfrak{a}) = \chi\lambda(\hat{\alpha})$ とおいて，$\chi\lambda$ をイデアル上の函数と考えることができる．このような量指標をイデアルに対する量指標といい，このときは，ゼータ函数

$$\zeta(s, \chi\lambda) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi\lambda(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a})^s = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \chi\lambda(\mathfrak{p})/N(\mathfrak{p})^s\right)^{-1}$$

（$\mathrm{Re}\, s > 1$）を定義することができる．（もっと一般に，E_0 の代りに mod $\tilde{\mathfrak{m}}$ の単数群をとって量指標を定義することもできるが，ここでは，E_0 にもとづく場合だけについて

述べた．詳しくは Hecke [1]，Rademacher [5] を参照されたい．）なお，λ に対して

$$\|\lambda\| = 3 + \sum_{q=1}^{r} |m_q| + \sum_{p=1}^{r_2} |l_p|$$

とおく．

さて，我々の目標に達するために必要な定理をあげよう．はじめは，三角和の評価に関する定理で，[4]，Th. 1 の，量指標をもつ場合への一般化である．

<u>定理 I</u>　$\mathfrak{a}$ を K のイデアルとし，C_0 に属し，かつ $\mathfrak{a}$ で割れるようなイデアルの集合を $L(\mathfrak{a})$ と記す．$\chi\lambda$ をイデアルに対する量指標とし，t を正数，A, B を次のような数とする；

$$\exp\left\{(\log(t+\|\lambda\|))^{2/3}\right\} \leqq A < B \leqq 2A \leqq 2(t+\|\lambda\|)^{8n}.$$

さらに，次のような和を定義する；

$$S(t, \chi\lambda; A, B) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in L(\mathfrak{a}) \\ A \leqq N(\mathfrak{b}) < B}} \chi\lambda(\mathfrak{b}) \exp(2\pi i t \log N(\mathfrak{b})).$$

このとき

$$|S(t, \chi\lambda; A, B)| \leqq c_1 A^{1-c_2/\alpha^2}$$

である．ここに

$$\alpha = n \log(t+\|\lambda\|)/\log A$$

で，c_1, c_2 は λ に関係しない定数である．　┘

次は，素イデアル定理に対応するような定理である（ω はいつも素数を意味するものとする）．

定理 II　λ を量指標とするとき

$$\sum_{\substack{N(\omega)\leqq x \\ (\omega)\in C_0}} \lambda(\omega) = E(\lambda)h_0^{-1}\,li(x) + O(x\log\|\lambda\|\exp(-cF_\lambda(x))).$$

ここに

$$E(\lambda) = \begin{cases} 1 & (\lambda = 1), \\ 0 & (\lambda \neq 1), \end{cases}$$

$$F_\lambda(x) = \log x \Big/ \left\{(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{1/5} + (\log\|\lambda\|)^{2/3}(\log\log\|\lambda\|)^{1/3}\right\}$$

である．　┘

もう少し一般に

定理 II′　$\chi\lambda$ をイデアルに対する量指標とするとき

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqq x} \chi\lambda(\mathfrak{p}) = E(\chi\lambda)\,li(x) + O(x\log\|\lambda\|\exp(-cF_\lambda(x))).$$

ここに

$$E(\chi\lambda) = \begin{cases} 1 & (\chi\lambda = 1), \\ 0 & (\chi\lambda \neq 1). \end{cases}$$

┘

さらに次のような一種の素数定理が得られる；

定理 III　$\pi(x;\alpha_q,\beta_p) = \pi(x;\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\cdots,\beta_{r_2})$

を，次の条件をみたす素数 ω の個数とする；

$$\begin{cases} \omega \succ 0, & N(\omega) \leqq x, \\ 0 \leqq W_q(\omega) < \alpha_q \leqq 1 & (q=1,\cdots,r), \\ 0 \leqq \textcircled{w}_p(\omega) < \beta_p \leqq 1 & (p=1,\cdots,r_2) \end{cases}$$

このとき

$$\pi(x;\alpha_q,\beta_p) = h_0^{-1} w_0\, \alpha_1\cdots\alpha_r\, \beta_1\cdots\beta_{r_2}\ \mathrm{li}(x) + O(x\exp(-cQ(x))).$$

ここに

$$Q(x) = (\log x)^{3/5}/(\log\log x)^{1/5}$$

である。 ┘

さらにこの系として

<u>定理 IV</u> $\pi_0(x;\alpha_q,\vartheta_p) = \pi_0(x;\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\vartheta_1,\cdots,\vartheta_{r_2})$

を，次の條件をみたす素数 ω の個数とする；

$$\begin{cases} \omega \succ 0, & N(\omega) \leqq x, \\ 0 \leqq W_q(\omega) < \alpha_q \leqq 1 & (q=1,\cdots,r), \\ 0 \leqq \arg \omega^{(p+r_1)} < 2\pi\vartheta_p \ (\leqq 2\pi) & (p=1,\cdots,r_2) \end{cases}$$

このとき

$$\pi_0(x;\alpha_q,\vartheta_p) = h_0^{-1} w_0\, \alpha_1\cdots\alpha_r\, \vartheta_1\cdots\vartheta_{r_2}\ \mathrm{li}(x) + O(x\exp(-cQ(x))).$$

┘

以上の諸定理から，我々の目標の結果が得られるのである

が，この最終段階は，[3]，§4 を殆どそのまま利用できるから，ここでは省略し，定理I，II，III について説明しよう

§2. 定理Iの証明

まず次の定理からはじめるのであるが，その証明は，[4]，Lemma 1 と同じだから省略する；

定理2·1 $\mathfrak{o}$ の元 μ で，次の条件

(6) $\mu \succ 0,\quad A \leqq N(\mu) < B,\quad 0 \leqq \overline{W}_q(\mu) < 1 \quad (q=1,\dots,r)$

をみたすものの集合を $\mathfrak{M}$ とすると

(7) $$S(t, \chi\lambda; A, B) = \frac{1}{w_0}\sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \lambda(\mu)\exp\left(2\pi i t \log N(\mu)\right).$$ 」

イデアルの集合を，n 次元空間を考えて，その中の整数の集合におきかえるこの方法は，解析数論では，Weber 以来，Landau, Hecke, Rademacher 等により繰返し使用されている周知の方法である．現代式には，μ を連続変数でおきかえて，E_0 の作用の下での基本領域を考えるといった方が理解されやすいかも知れない．(6) はそのことを具体的に表わしているのであるが，特に $0 \leqq \overline{W}_q(\mu) < 1$ なる式が基本的である．

さて，$S(t, \chi\lambda; A, B)$ を評価するには，(7) の右辺をさらに細分して，次のような和

を考える；

$$S(\nu)=\sum_{m_1,\cdots,m_n=0}^{M-1} F(\nu+\sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i).$$

ここに

$$F(\mu)=\lambda(\mu)\exp(2\pi i t\log N(\mu))$$

であり，$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ は $\mathfrak{a}$ の基底，

$$M=[A_0^{1-\delta}],\quad A_0=A^{1/n},\quad \delta=1/200,$$

ν は，$\mathfrak{M}$ に含まれて

$$\nu=M\sum_{i=1}^{n} k_i\gamma_i$$

の形をもつ数である．（このとき

$$c_1A_0\leqq|\nu^{(i)}|\leqq c_2A_0\qquad(i=1,\cdots,n)$$

となっている．）

$S(\nu)$ の評価に際しては，[4] の場合と異なり，量指標 λ に含まれる $\{m_q, l_p\}$ がどのように影響するか考慮しなければならないので，次のような工夫をする；

$$\sigma(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq 0),\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

として，

$$\theta_k=\begin{cases}\sigma(2\pi t+v_k) & (k=1,\cdots,r_1),\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\{\sigma(4\pi t+v_k)+i\sigma(l_k)\} & (k=r_1+1,\cdots,r_1+r_2),\\ \overline{\theta_{k-r_2}} & (k=r_1+r_2+1,\cdots,r_1+2r_2)\end{cases}$$

を定義し，これに対して，$(x_1^0, \dots, x_n^0)$ を，次の1次方程式系

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^0 \gamma_i^{(k)} = \nu^{(k)} \theta_k \qquad (k=1, \dots, n)$$

の解とする．($x_1^0, \dots, x_n^0$ は実数としてきまる.) $(\gamma_i^{(k)})_{1\le i,k\le n}$ は正則だから

$$x_j^0 \ll \max_k (|\nu^{(k)}|) \ll A_0 \qquad (j=1, \dots, n).$$

さらに，$L = (\log A)^{2/3}$ として，

$$d = ([L A_0^{-1} x_1^0], \dots, [L A_0^{-1} x_n^0])$$

(最大公約数) とおく．このとき $d \neq 0$ であるから，$d > 0$ としてよく，

$$m_{1i} = [L A_0^{-1} x_i^0]/d \qquad (i=1, \dots, n)$$

とおく．この $m_{11}, \dots, m_{1n}$ から，[4], p.~~22~~238 に述べたと同様に，有理整数 m_{ik} $(i=2, \dots, n;\ k=1, \dots, n)$ を適当に求めて，$\mathfrak{O}$ の基底

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} m_{ki} \gamma_i \qquad (k=1, \dots, n)$$

で，

$$\alpha_k \ll L \qquad (k=1, \dots, n)$$

となるものを作ることができる．この $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ により，$S(\nu)$ を書きかえれば，$S(\nu)$ は

$$S(\nu) = \sum_{a_2} \cdots \sum_{a_n} \sum_{a_1=a}^{b} F\Big(\nu + \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k\Big)$$

の形に表わされる。ここで

$$a_k \ll ML^{n-1} \qquad (k=1,\cdots,n)$$

となっている。

次に

$$z = z(a_2,\cdots,a_n) = (\nu + \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i)/\alpha_1,$$

$$B_s = B_s(m) = \frac{(-1)^s}{2\pi s}\Big[\sum_{q=1}^{r_1}(2\pi t+\nu_q)(z^{(q)}+m)^{-s} +$$

$$+\sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\Big\{(4\pi t+\nu_p)\,\mathrm{Re}((z^{(p)}+m)^{-s}) + l_{p-r_1}\,\mathrm{Im}((z^{(p)}+m)^{-s})\Big\}\Big]$$

$$(s=1,\cdots,k;\ |m|\leqq cML^{n-1})$$

とおき，

$$T_m = \sum_{x,y=1}^{Y} \exp\Big(2\pi i \sum_{s=1}^{k} B_s x^s y^s\Big)$$

なる和を定義する。ただし

$$Y = [A_0^{\frac{1}{2}-\delta}], \qquad k = [100\alpha]+1$$

とする。これらを使い，$F(\nu)$の展開を考えて，$S(\nu)$は

$$S(\nu) \ll M^n\Big(Y^{-2}\max_{|m|\leqq cML^{n-1}}|T_m| + A_0^{-\delta}\Big) + Y^2(ML^{n-1})^{n-1}$$

と評価される。さらに，T_mを考えるときは，次のようなB_sの評価が大切である：

<u>定理 2.2</u>　$s\equiv 1 \pmod 8$ かつ $s\leqq k$ のとき

$$c^s A_0^{\alpha-s} \leqq |B_s| \leqq (cL)^s A_0^{\alpha-s}.$$

証明　まず α_1 の定義により

$$\alpha_1^{(j)} = d^{-1} L A_0^{-1} \nu^{(j)} \theta_j \left(1 + O(L^{-1})\right).$$

一方で

$$\zeta + m = \alpha_1^{-1}\left(\nu + \sum_{i=2}^{n} a_i \alpha_i + \alpha_1 m\right)$$
$$= \alpha_1^{-1} \nu \left(1 + O(M L^n A_0^{-1})\right).$$

$s \leqq k \leqq c(\log A)^{1/2}$　だから

$$(\zeta^{(j)} + m)^{-s} = (\alpha_1^{(j)}/\nu^{(j)})^{+s}\left(1 + O(sML^n A_0^{-1})\right)$$
$$= (LA_0^{-1}/d)^s \theta_j^s \left(1 + O(sL^{-1})\right).$$

$s \equiv 1 \pmod 8$ なら $\theta_j^s = \theta_j$ であるから，結局

$$(\zeta^{(j)} + m)^{-s} = (LA_0^{-1}/d)^s \theta_j \left(1 + O(sL^{-1})\right).$$

したがって，このとき

$$(8)\quad B_s = \frac{(-1)^s}{2\pi s}\left(\frac{LA_0^{-1}}{d}\right)^s \left(1 + O(sL^{-1})\right) \times \left\{\sum_{q=1}^{r_1} |2\pi t + \nu_q| + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\left(|4\pi t + \nu_p| + |\ell_{p-r_1}|\right)\right\}.$$

この最後の $\{\cdots\}$ の中は，上下から $c(t + \|\lambda\|) = cA^{\alpha/n}$ でおさえられるから，求める評価が得られる．┘

（この定理では，$|B_s|$ の下からの評価の方が本質的な問題であって，θ_j を考えたのは，(8) のように，$\{\cdots\}$ の中の項をすべて絶対値にするためであり，こうすれば，下からの評

価がうまくできるのである。)

最後に，Vinogradov の平均値の定理を応用し，α が $1/8 \leqq \alpha \leqq c(\log A)^{1/2}$ をみたすことに注意して，

$$T_m \ll Y^{2-c/\alpha^2}$$

なる評価が得られるから，以上の諸結果をまとめて，定理 I が証明されるのである。

§3. 定理 II の証明

$\chi\lambda$ をイデアルに対する量指標とし，$\zeta(s, \chi\lambda)$ を考える。まず，

定理 3.1 $\displaystyle H(x, \chi\lambda) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \chi\lambda(\mathfrak{a})$

とおくとき

(9) $$H(x, \chi\lambda) = \alpha E(\chi\lambda)x + O(\|\lambda\|^{1/2} x^{1-1/2n}).$$

ここで，α はある定数である。┘

証明 $n=1$，あるいは $\chi\lambda=1$ のときは明らかだから(例えば [2])，$n \geqq 2$，$\chi\lambda \neq 1$ と仮定する。周知の公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{y^s}{s^2}\,ds = \begin{cases} \log y & (y \geqq 1), \\ 0 & (0 < y < 1) \end{cases}$$

により

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^2}\zeta(s, \chi\lambda)\,ds = \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \chi\lambda(\mathfrak{a}) \log(x/N(\mathfrak{a})).$$

一方で，Rademacher [6] により

$$\zeta(s,\chi\lambda) \ll (\|\lambda\|(1+|t|))^{\frac{n}{2}(1-\sigma+\frac{1}{2n})}$$

$(\sigma=\mathrm{Re}\, s>0)$． 特に，$\sigma \geqq 1-1/n$ なら

$$\zeta(s,\chi\lambda) \ll (\|\lambda\|(1+|t|))^{3/4}$$

となるから，

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} \chi\lambda(\mathfrak{a}) \log(x/N(\mathfrak{a})) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(1-1/n)} \frac{x^s}{s^2}\zeta(s,\chi\lambda)\,ds$$

$$\ll \|\lambda\|\, x^{1-1/n}.$$

この左辺を $R(x)$ とおいて，

$$R(x+\delta x)-R(x) \qquad (\delta=\|\lambda\|^{1/2}x^{-1/2n})$$

を考えることにより，(9) が導かれる． ┘

以下の定理は，[4]，§2 の諸定理と殆ど同様にして，順に証明されるから，定理だけをあげて，証明は省略する．

<u>定理 3.2</u> $\chi\lambda \neq 1$ とすると，$\sigma \geqq 1-1/4n$，$X=c(\|\lambda\|(1+|t|))^{4n}$ とするとき，

$$\zeta(s,\chi\lambda) = \sum_{N\mathfrak{a}\leqq X} \frac{\chi\lambda(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} + O(1).$$

┘

<u>定理 3.3</u> A, B を次のような数とする；

$$\exp\{(\log(|t|+\|\lambda\|))^{2/3}(\log\log(|t|+\|\lambda\|))^{1/3}\} \leqq A < B$$

$$\leqq 2A \leqq 2(|t|+\|\lambda\|)^{8n}.$$

c_1, T_0 を適当にとれば，　$|t|+\|\lambda\| \geqq T_0$　かつ

$$\sigma \geqq 1-c_1(\log\log(|t|+\|\lambda\|)/\log(|t|+\|\lambda\|))^{2/3}$$

のとき

$$\sum_{\substack{A \leqq N\mathfrak{b} < B \\ \mathfrak{b} \in L(\Omega)}} \frac{\chi\lambda(\mathfrak{b})}{N(\mathfrak{b})^s} \ll 1.$$

定理 3.4　$\chi\lambda \neq 1$　かつ

$$\sigma \geqq 1-c_2(\log\log(|t|+\|\lambda\|)/\log(|t|+\|\lambda\|))^{2/3}$$

のとき

$$\zeta(s,\chi\lambda) \ll (\log(|t|+\|\lambda\|))^{c_3}.$$

定理 3.5　$\zeta(s,\chi\lambda)$ は

$$\sigma \geqq 1-c_4/\psi_\lambda(t)$$

において零点をもたない．ここで

$$\psi_\lambda(t) = \log(|t|+\|\lambda\|)^{2/3}\log\log(|t|+\|\lambda\|)^{1/3}$$

である．さらに，　$\sigma \geqq 1-c_5/\psi_\lambda(t)$　なるところで，

$$\zeta'(s,\chi\lambda)/\zeta(s,\chi\lambda) \ll \psi_\lambda(t)$$

定理 3.6

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \chi\lambda(\mathfrak{p})\log N(\mathfrak{p}) = E(\chi\lambda)x + O(x\log\|\lambda\|\exp(-cF_\lambda(x))).$$

ここまでくれば，定理II を得ることは容易である．

§4.　定理III の証明

$$w_p/w_0 = \frac{1}{2\pi}\arg \xi^{(p+r_1)} \qquad (p=1,\cdots,r_2)$$

とおく．$1 \leqq w_p \leqq w_0$ であり，w_p は有理整数となる．さらに，

$$t_p = [\beta_p w_0 / w_p],$$

$$\gamma_{p,k} = \begin{cases} w_p / w_0 & (k = 0, 1, \cdots, t_p - 1), \\ \beta_p - t_p w_p / w_0 & (k = t_p) \end{cases}$$

として，$0 \leqq k_p \leqq t_p$ $(p = 1, \cdots, r_2)$ なる $\{k_p\}$ に対して，次の条件をみたす素数 ω の個数を $\pi(x; \alpha_q, \beta_p; k_1, \cdots, k_{r_2})$ と記す；

$$\begin{cases} \omega \succ 0, \quad N(\omega) \leqq x, \\ 0 \leqq W_q(\omega) < \alpha_q & (q = 1, \cdots, r), \\ k_p w_p / w_0 \leqq \Theta_p(\omega) < k_p w_p / w_0 + \gamma_{p, k_p} \\ & (p = 1, \cdots, r_2) \end{cases}$$

このとき

$$\pi(x; \alpha_q, \beta_p) = \sum_{k_1=0}^{t_1} \cdots \sum_{k_{r_2}=0}^{t_{r_2}} \pi(x; \alpha_q, \beta_p; k_1, \cdots, k_{r_2})$$

となるから，記号を少しかえて

$$\begin{cases} \omega \succ 0, \quad N(\omega) \leqq x, \\ 0 \leqq W_q(\omega) < \alpha_q & (q = 1, \cdots, r), \\ b_p / w_0 \leqq \Theta_p(\omega) < b_p / w_0 + \gamma_p & (p = 1, \cdots, r_2) \end{cases}$$

をみたす素数 ω の個数 $\pi^*(x; \alpha_q, \beta_p; b_p)$ を考えれば十分である．ここで b_p は有理整数で，$\gamma_p \leqq w_p / w_0$ $(p$

$=1,\cdots,r_2$).

さて，γを，$0<\gamma\leqq 1$ なる数として，次のような周期函数

$$g(x;\gamma)=\begin{cases}1 & (0\leqq x-[x]<\gamma),\\ 0 & (\text{その他のとき})\end{cases}$$

を定義し，ω に対して

$$(10)\quad G(\omega)=\prod_{q=1}^{r} g(\varpi_q(\omega);\alpha_q)\sum_{b=0}^{w_0-1}\prod_{p=1}^{r_2} g\left(\textcircled{\omega}_p(\omega)-\frac{b_p+b\,w_p}{w_0};\gamma_p\right)$$

とおくと，E_0 の元ζに対しては

$$G(\zeta\omega)=G(\omega)$$

であり，$G(\omega)\neq 0 \rightleftarrows G(\omega)=1$ であることもわかる．

しかも，$G(\omega)=1$ ならば，ω の同伴数 ω_1 で，

$$\begin{cases}\omega/\omega_1\in E_0,\\ 0\leqq \varpi_q(\omega_1)<\alpha_q & (q=1,\cdots,r)\\ 0\leqq \textcircled{\omega}_p(\omega_1)-b_p/w_0<\gamma_p & (p=1,\cdots,r_2)\end{cases}$$

となるものがあることがわかる．従って，$G(\omega)$を，E_0を法としての代表元で，さらに

$$\omega\succ 0,\qquad N(\omega)\leqq x$$

をみたす ω について加えれば，その和

$$\sum{}^{*} G(\omega)=\sum_{\substack{\omega \bmod E_0\\ \omega\succ 0,\ N(\omega)\leqq x}} G(\omega)$$

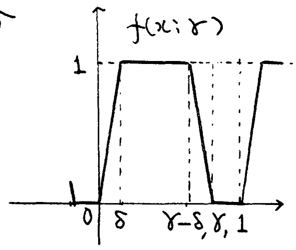
は, $\pi^*(x;\alpha_q,\beta_p;b_p)$ に等しい.

こうして, 問題は $G(\omega)$ に還元されるが, $g(x;\gamma)$ は不連続で, このままでは扱いにくいので, 他の函数で近似する方法をとる;

δ を小さい正数 ($\gamma \geqq 2\delta$ ならよい) として,

$$
f(x;\gamma)=\begin{cases}
(x-[x])/\delta, & (0 \leqq x-[x] \leqq \delta), \\
1 & (\delta \leqq \quad '' \quad \leqq \gamma-\delta), \\
(\gamma-x+[x])/\delta & (\gamma-\delta \leqq \quad '' \quad \leqq \gamma), \\
0 & (\gamma \leqq \quad '' \quad \leqq 1)
\end{cases}
$$

とおく. この $f(x;\gamma)$ に対して, 次の積分



$$
a(m;\gamma)=\int_0^1 f(x;\gamma)\, e^{-2\pi i m x}\, dx
$$

を計算すると,

$$
a(m;\gamma)=\begin{cases}
\gamma-\delta & (m=0), \\
(2-e^{-2\pi i m\delta}-e^{2\pi i(\delta-\gamma)m})/(2\pi i m)^2\delta & (m\neq 0)
\end{cases}
$$

であり, したがって, f の Fourier 級数

(11) $$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m;\gamma)\, e^{2\pi i m x}$$

は絶対かつ一様に収束するから, この級数は $f(x;\gamma)$ に等しい. ここで,

$$
\delta < \frac{1}{2}\min(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\gamma_1,\cdots,\gamma_{r_2})
$$

として，(10) と同じように，f を使って

$$F(\omega)=\prod_{q=1}^{r} f(\varpi_q(\omega);\alpha_q)\sum_{b=0}^{w_0-1}\prod_{p=1}^{r_2} f\left(\Theta_p(\omega)-\frac{b_p+bw_p}{w_0};\gamma_p\right)$$

とおくと，

$$F(\omega)\leqq G(\omega)$$

は明らかであり，(11) の絶対収束性によって，$F(\omega)$ は

$$\begin{aligned}F(\omega)=&\sum_{m_1,\dots,m_r=-\infty}^{\infty}\ \sum_{l_1,\dots,l_{r_2}=-\infty}^{\infty}\prod_{q=1}^{r} a(m_q;\alpha_q)\prod_{p=1}^{r_2} a(l_p;\gamma_p)\\ &\times\exp(-2\pi i\, l_p b_p/w_0)\exp\left\{2\pi i\left(\sum_{q=1}^{r}\varpi_q(\omega)m_q+\sum_{p=1}^{r_2}\Theta_p(\omega)l_p\right)\right\}\\ &\times\sum_{b=0}^{w_0-1}\exp\left(-2\pi i b\sum_{p=1}^{r_2} l_p w_p/w_0\right)\end{aligned}\tag{12}$$

と展開される．この最後の和は，

$$\sum_{b=0}^{w_0-1}\exp\left(-2\pi i b\sum_{p=1}^{r_2} l_p w_p/w_0\right)=\begin{cases} w_0 & \left(\sum_{p=1}^{r_2} l_p w_p/w_0 \text{ が有理整数のとき}\right),\\ 0 & (\text{その他のとき})\end{cases}$$

となるから，$F(\omega)$ の展開 (12) の中で

$$\exp\left\{2\pi i\left(\sum_{q=1}^{r}\varpi_q(\omega)m_q+\sum_{p=1}^{r_2}\Theta_p(\omega)l_p\right)\right\}$$

が量指標にならない項はすべて消えることになる（量指標の条件の1つ (3) をみよ）．したがって，

$$A(m_1,\cdots,m_r;l_1,\cdots,l_{r_2}) = \prod_{q=1}^{r} a(m_q;\alpha_q) \times \prod_{p=1}^{r_2} a(l_p;\gamma_p)\exp(-2\pi i\, l_p b_p/w_0)$$

とおけば，F(ω) は

$$F(\omega) = w_0 \sum_{\lambda} A(m_1,\cdots,m_r;l_1,\cdots,l_{r_2})\lambda(\omega)$$

と表わされ，この和は，すべての量指標にわたるものとみなされる．ここで

$$(13)\begin{cases} A(0,\cdots,0) = \alpha_1\cdots\alpha_r\gamma_1\cdots\gamma_{r_2} + O(\delta), \\ |A(m_1,\cdots m_r;l_1,\cdots,l_{r_2})| \leqq \delta^{-r-r_2}\prod_{q=1}^{r}(1+m_q^2)^{-1}\prod_{p=1}^{r_2}(1+l_p^2)^{-1} \\ \qquad ((m_1,\cdots,l_1,\cdots) \neq (0,\cdots,0)). \end{cases}$$

次に，F(ω) とは逆に，G(ω) を上からおさえるような H(ω) を考える．そのためには，

$$h(x;\gamma) = \begin{cases} f(x+\delta;\gamma+2\delta) & (\gamma+2\delta<1 \text{ のとき}), \\ f(x+\delta;3\delta)+f(x-\delta;\gamma) & (\gamma+2\delta \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

として，$h(x;\gamma)$ を $f(x;\gamma)$ の代りに利用すればよい．この場合は

$$H(\omega) = w_0 \sum_{\lambda} B(m_1,\cdots,m_r,l_1,\cdots,l_{r_2})\lambda(\omega)$$

なる和が得られ，係数 $B(m_1,\cdots,l_1,\cdots)$ も (13) と同じように評価される．

こうして，

$$(14) \qquad \sum{}^{*} F(\omega) \leqq \sum{}^{*} G(\omega) \leqq \sum{}^{*} H(\omega)$$

となるが，まず $\sum^{*} F(\omega)$ を考えて，

$$\sum{}^{*} F(\omega) = w_0 \sum_{\lambda} A(m_1, \cdots, m_r, l_1, \cdots, l_{r_2}) \sum{}^{*} \lambda(\omega)$$

$$= w_0 A(0, \cdots, 0) \sum{}^{*} 1 + w_0 \sum_{\lambda \neq 1} A(m_1, \cdots, l_1, \cdots) \sum{}^{*} \lambda(\omega)$$

$$= S_1 + S_2$$

とわければ，

$$S_1 = \{ w_0 \alpha_1 \cdots \alpha_r \gamma_1 \cdots \gamma_{r_2} + O(\delta) \} \{ h_0^{-1} li(x) + O(x \exp(-cQ(x))) \}$$

$$= h_0^{-1} w_0 \alpha_1 \cdots \alpha_r \gamma_1 \cdots \gamma_{r_2} li(x)$$

$$+ O(\delta x + x \exp(-cQ(x))).$$

S_2 の方は，(13) を利用して，

$$S_2 = O(\delta^{-n} x \exp(-cQ(x)))$$

となり，あわせて，

$$\sum{}^{*} F(\omega) = h_0^{-1} w_0 \alpha_1 \cdots \alpha_r \gamma_1 \cdots \gamma_{r_2} li(x)$$

$$+ O(\delta x + \delta^{-n} x \exp(-cQ(x))).$$

$\sum^{*} H(\omega)$ に対しても同様な評価が成りたち，(14) によって，結局

$$\sum{}^{*} G(\omega) = h_0^{-1} w_0 \alpha_1 \cdots \alpha_r \gamma_1 \cdots \gamma_{r_2} li(x)$$

$$+ O(\delta x + \delta^{-n} x \exp(-c_1 Q(x)))$$

となる．ここで $\delta = \exp(-c_1 Q(x)/2n)$ とおけば，π^* に対しての求める結果が得られ，定理 III も導かれることになるのである．

はじめにも述べた通り，我々の主要定理は，Hecke, Landau, Rademacher 等の結果に，[4] にあるような三角和の方法を応用して，精密化あるいは一般化をはかったものであり，したがって，途中の一々の証明は省略し，Fourier 級数展開を応用するところや，量指標をもつ三角和のところなど，新しく工夫した点を主として述べたのである．特に，Fourier 級数展開のところは，先の [3] では，少しごたごたしてわかりにくかったので，今度の方が余程すっきりしていると思う．

また，量指標は，n 次元空間内の整数の分布を考えるときなどに，非常に有効な手段であることがわかる．ただし，この方法は，一面からいえば，あまりに便利であるために，問題やその解決法が形にはまってしまうおそれがないとはいえない．既に，素数定理自体が，古典的な形をもつ問題ともいえるので，素数定理を超える素数分布の問題を研究するためにも，さらに新しい解析的手段の開拓に常に留意しなければならないであろう．

文 献

[1] E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, I, II. Math. Z., 1 (1918), 357–376, 6 (1920), 11–51.

[2] E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Teubner, Leipzig, 1918.

[3] T. Mitsui, Generalized Prime Number Theorem, Jap. J. Math., 26 (1956), 1–42.

[4] T. Mitsui, On the prime ideal theorem, J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 233–247.

[5] H. Rademacher, Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper, III, Math. Z., 27 (1928), 321–426.

[6] H. Rademacher, On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications. Math. Z., 72 (1959), 192–204.